www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1989

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir $\boxed{\textit{encadrer}}$ *chacun des résultats correspondants aux éléments* $\boxed{\textit{encadrés}}$ *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

»»»»»»»»»»o««««««««««

SUJET N° 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx}{\cos^n x}dx \quad , \quad \text{et} \quad u_n = \frac{n}{2^{n/2}}\,(2I_n - I_{n+1})\,.$$

1°) Calculer $\boxed{I_2}$.

2°) Calculer $\boxed{u_2}$.

3°) Au moyen de l'identité suivante, que l'on vérifiera,

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin nx.\sin x}{\cos^{n+1} x}dx \quad = \int_0^{\pi/4} \sin nx.d\left(\frac{1}{n\cos^n x}\right) \quad ,$$

ou autrement, montrer que la suite (u_n) est de période 8. Préciser ses $\boxed{\text{valeurs}}$.

4°) Exprimer $\boxed{I_{11}}$ le plus simplement possible, et donner sa valeur approchée à 10^{-3} par défaut.

5°) La suite (I_n) converge-t-elle ?

SUJET N° 2

Soit $(a(n))$ une suite strictement croissante d'entiers : $1 \leqslant a(1) < a(2) < \ldots < a(n) < \ldots$

On pose

$$V_1 = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a(1)} = \sum \frac{1}{q} \quad , \quad \text{où } 1 \leqslant q \leqslant a(1)$$

$$V_2 = \frac{1}{a(1)+1} + \ldots + \frac{1}{a(2)} = \sum \frac{1}{q} \quad , \quad \text{où } a(1) < q \leqslant a(2)$$

$$V_n = \frac{1}{a(n-1)+1} + \ldots + \frac{1}{a(n)} = \sum \frac{1}{q} \quad , \quad \text{où } a(n-1) < q \leqslant a(n) \quad , \quad \text{si } n \geqslant 2.$$

et

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t} \quad , \quad \text{avec } 0 < \alpha < \beta\,.$$

T.S.V.P.

1°) Comparer les 3 nombres V_n , I(a(n-1),a(n)) et I(a(n-1) + 1,a(n) + 1).

2°) Dans le cas où $a(n) = 2^n$, montrer que V_n tend vers une certaine limite $\boxed{\ell}$. que l'on déterminera.

3°) On suppose maintenant, dans toute la suite de l'exercice, que la suite (a(n)) est telle qu'elle donne naissance à une suite (V_n) dont les premiers termes sont

$$V_1 = 1 \ , \ V_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ , \ V_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ , \ V_4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \ ,$$

le terme général V_n, lui, étant égal à la somme des inverses des n nombres entiers qui se présentent immédiatement après ceux qui ont déjà été utilisés dans V_1 , V_2 , ... , V_{n-1} Calculer $\boxed{a(n)}$.

4°) Montrer que V_n admet un équivalent simple de la forme $\frac{C}{n}$, où $\boxed{C}$ est une constante que l'on calculera.

5°) Donner enfin la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} V_n$.

SUJET N° 3

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$

1°) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle précédente. On allègera l'écriture en posant $a = e^{i\pi/4}$, et en exprimant, en fonction de ce nombre a, les coefficients $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, tels que

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-\overline{a}} + \frac{C}{x+a} + \frac{D}{x+\overline{a}} \ .$$

2°) En déduire, toujours en fonction de a, l'expression de la dérivée d'ordre n de f(x), notée $f^{(n)}(x)$.

3°) Montrer que l'expression $\dfrac{|\ f^{(n)}(x)\ |}{2^{n/2} \ . \ n\ !}$

est bornée pour tout réel x et tout entier positif n . Le nombre $\sqrt{2}$ en est-il un majorant ?

4°) Vérifier que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^4+1)^{n+1}}$,

où $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients réels, dont on déterminera le $\boxed{\text{monôme}}$ de plus haut degré.

5°) On introduit les coefficients C(n,k) de $P_n(x)$, donc tels que

$$P_n(x) = \sum_k C(n,k).x^k \ .$$

Montrer que C(n,k) = 0 si n+k n'est pas un multiple de 4.

SUJET N° 4

Soit F la fonction de la variable réelle x définie par $F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2x \cos t)\, dt$

et (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n}\, dt$

1°) Au moyen d'une intégration par parties démontrer la formule

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad , \quad n \geqslant 1$$

2°) En déduire une expression de I_n utilisant $\pi/2$, 4^n , $(2n)!$ et $(n!)^2$

3°) Montrer que F(x) est développable en série entière, soit $F(x) = \sum a_n x^n$.

Préciser les coefficients $\boxed{a_n}$ et le rayon de convergence R de cette série.

4°) Montrer que F(x) satisfait à une équation différentielle de la forme $Ay'' + By' + Cy = 0$, où $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ et $\boxed{C}$ sont des monômes que l'on explicitera.

5°) Au moyen du changement de variable u = cost, ou autrement, déterminer $\boxed{\ell} = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

SUJET N° 5

Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y quelconque, on définit la fonction f par $f(x,y) = x^y$.

1°) Soit $C(\lambda)$ la "ligne de niveau" λ, c'est-à-dire l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $f(x,y) = \lambda$. Dessiner la courbe C(e), correspondant à la valeur e du paramètre λ ($e = \exp 1$) .

2°) Donner l'allure de $C(\lambda)$ selon que $0 < \lambda < 1$ ou $1 < \lambda$. Décrire la transformation géométrique par laquelle on passe de C(e) à $C(\lambda)$. (Pour abréger, poser $\mu = \ln\lambda$).

3°) A la lumière de ce qui précède, ou autrement, décider de l'existence ou non de la limite de f quand le couple (x,y) tend vers (0,0).

4°) Montrer que la normale à $C(\lambda)$ en son point d'inflexion demeure tangente, quand λ varie, à une certaine parabole (P), dont l'équation est de la forme $y^2 = -2p(x-x_0)$.
Déterminer les nombres positifs $\boxed{p}$ et $\boxed{x_0}$.

5°) On admet la formule

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$$

Par ce moyen, ou autrement, calculer l'intégrale $\boxed{I} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$

»»»»»»»»»»o«««««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail